Ein neuer Zugang zur Physik der Sonne

Energiebilanzen und Sternentwicklung

Wissenschaftliche Arbeit

für

die Zulassung zum Staatsexamen

von

Holger Hauptmann

Universität Karlsruhe

Abteilung für Didaktik der Physik

am Institut für Theoretische Festkörperphysik

Dezember 1995

Inhalt

Einleitung ... 3

Themen der „traditionellen“ Sonnenphysik ... 5

- **Die innere Struktur der Sonne und ein Differentialgleichungssystem** ... 5
  - Massenverteilung ... 6
  - Hydrostatisches Gleichgewicht ... 6
  - Die ideale Gasgleichung ... 7
  - Temperaturverteilung und Energietransport ... 8
  - Zusammenfassung und neue Probleme ... 9
- **Thermo-nukleare Reaktionsketten und -zyklen** ... 10

Themen einer „neuen“ Sonnenphysik ... 13

- **Eine Energiebilanz** ... 13
  - Die Energie des Gravitationsfeldes ... 14
  - Die Energie des Gases ... 15
  - Die Energiebilanz ... 15
- **Entropiebilanz** ... 16
  - Die Sonne im Labor ... 16
- **Stabilität** ... 17
- **Wärmewiderstand und Reaktionswiderstand** ... 17
  - „Wärmestau“ und Aufheizung ... 18
  - Energiequellen und Lebensdauer ... 18
  - Reaktionsumsatz ... 20
- **Stabilität der Brennphasen** ... 21
- **Zusammenfassung der Sternentwicklung** ... 21

Ein Modell ... 23

- **Aufbau** ... 23
- **Stabilität des Systems** ... 24
- **Existenz eines Gleichgewichts bei gegebenem Entropieinhalt** ... 24
- **Lage der Gleichgewichtskonfiguration** ... 25
- **Abhängigkeit der Gleichgewichtslage vom Entropieinhalt des Systems** ... 26
- **Änderung der Temperatur mit der Gleichgewichtslage** ... 26
- **Ergebnisse des Modells** ... 28

Fazit ... 29

Literaturverzeichnis ... 30

Einleitung

Würde die Sonne nicht seit mehr als 4 Milliarden Jahren unsere Erde so gleichmäßig mit Licht und Wärme versorgen, hätte sich niemals das Leben auf der Erde entwickeln können. Sie ist eine wesentliche Grundlage unserer Existenz und sollte in Anbetracht dieser Bedeutung auch ein wichtiges Thema in der physikalischen Ausbildung sein.

Fragt man aber nun was man im Physikunterricht der Schule oder auch in einem durchschnittlichen Physikstudium über die Sonne erfährt, scheint es als wäre das genaue Gegenteil der Fall. Über die Physik der Sonne lernt man praktisch nichts. Die Sonne begegnet einem nur als Hilfsmittel bzw. in ihren Wechselwirkungen mit der Umgebung. So taucht sie nur auf als austauschbare Energie- und Wärmequelle, als nützliche Beleuchtungseinrichtung in der Optik oder in der Mechanik als Ausgangspunkt und ideales Beispiel für eine Zentralkraft, wenn die Keplerschen Gesetze oder Finsternisse besprochen werden.

So scheint die Physik über die Sonne selbst nichts zu sagen zu haben, obwohl doch viele physikalische Fragen nahe liegen: Warum ist die Sonne so heiß? Was brennt da eigentlich in der Sonne? Und wenn man weiß, daß eine Kernfusionsreaktion abläuft: Warum brennt sie so ruhig und gleichmäßig über Milliarden Jahre hin?

Sucht man nach Gründen für dieses anscheinende Desinteresse der Schulphysik an der Sonne, scheint es, als wäre die Komplexität des Themas dafür verantwortlich. Die Sonne scheint physikalisch nur mit großer Mühe und Anstrengung beschreibbar zu sein. Da alle wichtigen Größen wie Massendichte, Druck, Temperatur, Energiestromdichte usw. Feldgrößen sind, d.h. vom Ort innerhalb der Sonne abhängen, stößt man in der Fachliteratur sehr schnell auf komplizierte und unhandliche Differentialgleichungssysteme. Wohlbegründete Aussagen über die Sonnenphysik scheinen ohne ihre Hilfe nicht möglich zu sein. Nur mit diesen Differentialgleichungssystemen kann man die Verteilung der Feldgrößen innerhalb der Sonne bestimmen und ohne Kenntnis der Verteilungen scheinen keine Aussagen über die Struktur und das charakteristische Verhalten der Sterne möglich zu sein. Da die zur Lösung der Differentialgleichungssysteme notwendige Mathematik im allgemeinen nicht zur Verfügung steht, wird auf die physikalische Behandlung der Sonne dann gleich ganz verzichtet. Wird doch einmal etwas zur Sonne gesagt, wird höchstens auf die Kernfusionsprozesse in ihrem Innern eingegangen. Man erfährt, daß wie in der Wasserstoffbombe Wasserstoff zu Helium verschmolzen wird, und die verschiedenen dabei auftretenden Reaktionsketten werden explizit beschrieben. Drei verschiedene Varianten der pp-Kette und der Bethe-Weizsäcker- bzw. CNO-Zyklus werden ausführlich analysiert, obwohl eine Bilanzgleichung und der Energieumsatz der Reaktion zunächst schon ausreichen würden um die Struktur der Sonne zu erklären.

In dieser Arbeit soll nun gezeigt werden, wie mit einer einfachen Energie- und Entropiebilanz die Stabilität und das Verhalten der Sonne erklärt werden kann, so daß es auch auf einer elementaren Ebene möglich ist, etwas zur Physik der Sonne zu sagen.

Außerdem wird ein „Tischmodell“ vorgestellt, das in seinen wichtigsten Strukturen der Sonne entspricht, so daß die wesentlichen Eigenschaften der Sonne auch an einem der Anschauung zugänglicheren Modell gezeigt werden können.

Themen der „traditionellen“ Sonnenphysik

In diesem Abschnitt sollen die Themen und Inhalte der üblichen Sonnenphysik kurz dargestellt werden, so wie sie in der entsprechenden Fachliteratur vorkommen. Dabei wird deutlich werden, daß die dort verwendeten Vorgehensweisen für eine einfache Darstellung des Problems nicht geeignet sind und dort keine elementaren Fragen und prinzipiellen Charakteristika der Sonne behandelt werden. Statt dessen wird mit wissenschaftlicher Präzision die Sonne in allen Einzelheiten analysiert.

Die innere Struktur der Sonne und ein Differentialgleichungssystem

Geht man von der Literatur aus, scheint das wichtigste Ziel der Sonnenphysik die Bestimmung der inneren Struktur bzw. des Aufbaus der Sterne zu sein, d.h. man möchte die räumliche Verteilung der Werte einiger physikalischer Größen innerhalb der Sterne ermitteln. Die dabei besonders interessierenden Größen sind unter anderem der Druck, die Massendichte und die Temperatur.

Um die Verteilung ermitteln zu können, werden zunächst einige vereinfachende Annahmen gemacht, um eine handhabbare, mathematische Beschreibung zu ermöglichen.

So werden zunächst die Rotation von Sternen, aber auch die Einflüsse von Magnetfeldern und ähnlichen Störungen vernachlässigt. Auch werden nur Einzelsterne betrachtet um z.B. einen Massenstrom zwischen den Komponenten eines Binärsystems auszuschließen. Der Energie- und Entropietransport wird weiterhin häufig ausschließlich durch Strahlung beschrieben, da für die Beschreibung des Energietransportes durch Konvektion keine zufriedenstellende Theorie existiert.

Unter diesen Voraussetzungen sind die Gravitation und der Gasdruck die einzigen wirksamen Kräfte und man erhält eine sphärisch symmetrische Konfiguration. Alle Funktionen sind auf konzentrischen Schalen konstant und hängen nur vom Abstand zum Zentrum ab. Will man die zeitliche Veränderung des Systems berücksichtigen, benötigt man als zweiten unabhängigen Parameter die Zeit.

So hat man dann als grundlegende Variablen den Radius r und die Zeit t. Alle anderen Größen möchte man als abhängig von diesen beiden beschreiben. Diese Form der Beschreibung wird teilweise auch Euler’sche Beschreibung genannt. Eine Alternative hierzu ist die sogenannte Lagrange’sche Beschreibung, bei der die Masse m statt des Radius r als unabhängiger Parameter verwendet wird. Die entsprechenden Umformungen der Gleichungen sind leicht durchzuführen. Die Lagrange’sche Beschreibung hat den Vorteil, daß sich Integrationsgrenzen nicht ändern, da die Gesamtmasse M konstant bleibt, während der Radius R eines Sterns im Laufe der Zeit großen Schwankungen unterworfen ist.

Um die Verteilung nun endgültig zu bestimmen, werden mit Hilfe einiger Gleichgewichts- und Erhaltungsbedingungen Differentialgleichungen entwickelt, die zusammen ein System zur Berechnung der unbekannten Variablen bilden. Da ein Teil dieser Gleichungen später benötigt wird, sollen sie hier ausführlich hergeleitet werden.

Massenverteilung

Zur Bestimmung der Massenverteilung wird zunächst die Größe *m(r)* bzw. *m(r,t)* eingeführt. *m(r)* ist die Masse der Sternmaterie innerhalb der Kugel mit dem Radius *r*. Es ist daher $m(0) = 0$ und $m(R) = M$, wobei *R* und *M* der Gesamtradius bzw. die Gesamtmasse des Sterns sind.

Die Massenänderung innerhalb einer Kugelschale der Dicke *dr* und mit dem Radius *r* beträgt dann :

$$dm = 4\pi \cdot r^2 \cdot \rho(r) \cdot dr \quad ,$$

wobei $\rho(r)$ die Massendichte an der Stelle *r* ist.

Man erhält damit *m(r)* durch das Integral :

$$m(r) = \int_0^r 4\pi \cdot r^2 \cdot \rho(r) \cdot dr \quad .$$

Die erste Grundgleichung, die sogenannte Massengleichung lautet[1] :

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi \cdot r^2 \cdot \rho(r) \quad . \qquad (1)$$

Hydrostatisches Gleichgewicht

Die meisten Sterne befinden sich offensichtlich in sehr langlebigen Evolutionsphasen, so daß an ihnen keinerlei Veränderung beobachtet werden kann. Ihre Konfiguration ist also außerordentlich stabil, was voraussetzt, daß sich die Massenelemente in ihrem Inneren im Kräftegleichgewicht befinden. Man beobachtet also ein mechanisches Gleichgewicht zwischen der Gravitation des Sterns, die ihn zusammenhält, und dem Druckgradienten des Gases, der ihn gegen die Gravitation stabilisiert. Dieses Kräftegleichgewicht wird als hydrostatisches Gleichgewicht bezeichnet.

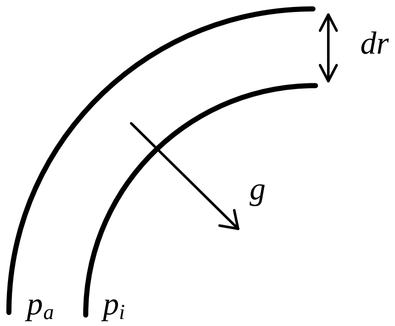
Um diese Bedingung formelmäßig zu fassen, betrachtet man eine dünne Kugelschale der Dicke *dr*. Die in ihr liegende Masse erzeugt einen Druck $p = g(r) \cdot \rho(r) \cdot dr$, wobei

---

[1] Mit der Umformung $\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi \cdot r^2 \cdot \rho}$ erhält man auch die Umrechnungsformel von Euler'schen zu Lagrange'schen Koordinaten für die anderen Gleichungen, denn ist $\frac{dx}{dr} = y$, folgt mit der Kettenregel $\frac{dx}{dm} = \frac{dx}{dr} \cdot \frac{dr}{dm} = \frac{y}{4\pi \cdot r^2 \cdot \rho}$.

$g(r) = \frac{G \cdot m(r)}{r^2}$ die Gravitationsfeldstärke beim Radius r ist (G ist die Gravitationskonstante).

Damit das Massenelement in Ruhe bleibt, muß der Druckunterschied zwischen der Unter- und Oberseite der Schale diesem Druck gerade entsprechen. Der innere Druck muß also soviel höher sein als der äußere, daß er genau das Gewicht der Schale zusätzlich tragen kann. Es gilt dann :



$$p_i - p_a = g(r) \cdot \rho(r) \cdot dr$$

oder

$$dp = p_a - p_i = -\frac{G \cdot m(r)}{r^2} \cdot \rho(r) \cdot dr \ .$$

Man erhält damit die Gleichung für das hydrostatische Gleichgewicht, die zweite Grundgleichung :

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G \cdot m(r) \cdot \rho(r)}{r^2} \ . \qquad (2)$$

Die ideale Gasgleichung

Die zwei Gleichungen (1) und (2) zur Beschreibung des mechanischen Problems beinhalten 3 unbekannte Funktionen : *m(r), ρ(r)* und *p(r).* Um eine Lösung zu erhalten, benötigt man eine weitere Gleichung, die diese Funktionen miteinander verknüpft. Dies ist die sogenannte Zustandsgleichung.

Trotz der hohen Drücke, Dichten und Temperaturen, die in Sternen auftreten, wird im allgemeinen die ideale Gasgleichung zur Beschreibung der Sternmaterie verwendet. Dies ist möglich, da die mittlere kinetische Energie der Teilchen auch unter Sternbedingungen groß gegenüber der mittleren Wechselwirkungsenergie zwischen den Teilchen ist. Nur für die sehr extremen Endstadien der Sternentwicklung werden Effekte wie Elektronenentartung oder Neutronisation berücksichtigt.

Die ideale Gasgleichung wird in der Astrophysik meist in einer Form verwendet, in der nur lokale Größen auftreten :

$$p = \frac{R \cdot \rho \cdot T}{\hat{m}} \ ,$$

mit der Gaskonstanten R, der Massendichte ρ und der über die chemische Zusammensetzung gemittelten molaren Masse $\hat{m} = \frac{m}{n}$.

Die dritte Grundgleichung ist also die ideale Gasgleichung :

$$p(r) = \frac{R}{\hat{m}(r)} \cdot \rho(r) \cdot T(r) \ . \qquad (3)$$

Da in der Gasgleichung die Temperaturverteilung auftaucht, wird das Problem noch komplizierter. Der rein mechanische Teil des Problems mit den Gleichungen (1) und (2) wird nun über die Gasgleichung (3) mit dem thermo-energetischen Teil des Problems verknüpft, für das noch keine Gleichungen entwickelt wurden.

Im Gegensatz zur Massengleichung, der Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts und der Gasgleichung, die in den folgenden Kapiteln noch benötigt werden, sollen diese Gleichungen hier ohne Herleitung vorgestellt werden.

Temperaturverteilung und Energietransport

Die Temperaturverteilung ist direkt abhängig von dem durch die Sonne zu transportierenden Energiestrom. Der Energie- und Entropiestrom wird durch den Wärmewiderstand der Sonnenmaterie beschränkt und durch den Temperaturgradienten angetrieben. Der Temperaturgradient wird sich daher gerade so einstellen, daß für den Entropiestrom ein Fließgleichgewicht erreicht wird. Ist der Widerstand zu hoch um die im Innern erzeugte Entropie abzuführen, hat man einen „Wärmestau“ und der Stern wird sich im Inneren weiter erwärmen, bis die Entropie abgeführt werden kann. Dieser „Misthaufeneffekt“[2] ist für die hohe Temperatur im Inneren der Sonne verantwortlich.

Sei *P(r)* die Energiestromstärke[3] durch die Oberfläche der Kugel mit dem Radius r.[4]

Die Änderung dieses Energiestroms innerhalb der Schale mit der Dicke dr und dem Radius r kann man dann schreiben als :

$$dP(r) = 4\pi \cdot r^2 \cdot \rho(r) \cdot \varepsilon(r) \cdot dr \ ,$$

wobei ε die insgesamt durch Fusionsreaktionen umgesetzte Energie pro Kilogramm und Sekunde bezeichnet, bei den jeweiligen lokalen Werten von Druck, Temperatur usw. Man nennt ε die Energieerzeugungsrate.

---

[2] vgl. Kapitel 3, „Wärmewiderstand und Reaktionswiderstand“.

[3] Die Größe P(r) wird in der Astrophysik meist als Leuchtkraft bezeichnet und mit L_r bzw. L(r) abgekürzt.

[4] Interessanterweise findet man in der Literatur keinen Ansatz, die Entropie statt der Energie zur Beschreibung zu verwenden, die Entropie kommt in praktisch allen Büchern nicht vor.

Diese Gleichung stellt eine Energiebilanz dar: der nach außen fließende Energiestrom kann nur um den Betrag zunehmen, der durch thermo-nukleare Reaktionen in der Sonne umgesetzt wird. Die vierte Grundgleichung lautet :

$$\frac{d\,j_E(r)}{dr} = \rho(r)\cdot\varepsilon(r)\;. \tag{4}$$

Die Energiestromdichte $j_E(r)$ ist dem Temperaturgradienten proportional und von der Wärmeleitfähigkeit der Materie abhängig. Es gilt :

$$j_E(r) = -\lambda(r)\cdot\frac{dT(r)}{dr}\;.$$

Damit erhält man die letzte Grundgleichung :

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{j_E(r)}{\lambda(r)}\;. \tag{5}$$

In der Astrophysik wird meist nicht die Wärmeleitfähigkeit benutzt, sondern die sogenannte Opazität κ. Sie ist ein Maß für die Strahlungsundurchsichtigkeit der Sternmaterie und von der jeweiligen Dichte, chemischen Zusammensetzung und dem Ionisationsgrad abhängig. Je größer sie ist, desto größer ist der Wärmeleitungswiderstand der Materie. Es gilt :

$$\lambda(r) = \tfrac{16}{3}\cdot\sigma\cdot\frac{T(r)^3}{\kappa(r)\cdot\rho(r)}\;,$$

wobei σ die Stefan-Boltzmann-Konstante ist.

Die Wärmeleitfähigkeit ist also um so größer,

- je größer die Temperatur,
- je kleiner die Dichte und
- je kleiner die Opazität bzw. Strahlungsundurchlässigkeit sind.

Zusammenfassung und neue Probleme

Insgesamt wurden für die fünf Unbekannten $p(r)$, $\rho(r)$, $m(r)$, $T(r)$ und $j_E(r)$ fünf Gleichungen erhalten, die zur besseren Übersicht noch einmal kurz zusammengestellt werden :

- Massengleichung : $$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi\cdot r^2\cdot\rho(r)$$
- hydrostatisches Gleichgewicht : $$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G\cdot m(r)\cdot\rho(r)}{r^2}$$
- ideale Gasgleichung : $$p(r) = \frac{R}{\hat{m}(r)}\cdot\rho(r)\cdot T(r)$$

- Energiebilanz : $$\frac{d\,j_E(r)}{dr} = \rho(r) \cdot \varepsilon(r)$$
- Energietransport (durch Strahlung) : $$\frac{dT(r)}{dr} = -\tfrac{3}{16}\,\frac{\kappa(r) \cdot \rho(r) \cdot j_E(r)}{\sigma \cdot T(r)^3}$$

Trotz der zu Beginn genannten Vereinfachungen hat man noch immer ein kompliziertes und nur numerisch lösbares Differentialgleichungssystem. Zu seiner Lösung fehlen außerdem weiterhin die richtigen Ansätze, denn zur Gewinnung der Gleichungen wurden einige physikalische Schwierigkeiten einfach in neue Größen gesteckt, über die immer noch keine Aussage möglich ist. Dies sind die molare Masse $\hat{m}$, die Opazität κ und die Energieerzeugungsrate ε. Sie alle hängen auf vielfältige Weise ab von der chemischen Zusammensetzung, dem Ionisationsgrad, dem Druck, der Temperatur usw., so daß daher zunächst auch noch die chemische Zusammensetzung, sowie $\hat{m}$, κ und ε bestimmt werden müßten.

Offensichtlich ist dieser Ansatz nicht für eine einfache Darstellung der Sonnenphysik geeignet. Mit jeder neuen Gleichung, die ja die Zahl der Bedingungen für die Unbekannten erhöhen sollte, wurden neue Unbekannte eingeführt.

Thermo-nukleare Reaktionsketten und -zyklen

Die Notwendigkeit, zur Lösung des Differentialgleichungssystems die genauen Vorgänge bei der thermo-nuklearen Energiegewinnung in Sternen zu kennen, führte wohl dazu, daß in diesem Zusammenhang den spezifischen Reaktionsketten und -zyklen bis heute eine so große Bedeutung beigemessen wird. In der Tat war es in den dreißiger und vierziger Jahren dieses Jahrhunderts eine große wissenschaftliche Leistung, die theoretischen Grundlagen zum Verständnis der Tatsache zu schaffen, daß unter den Bedingungen in der Sonne solche Kernfusionsprozesse überhaupt stattfinden können.

Zuvor war lange Zeit gerätselt worden aus welchen Quellen die Sonne ihren Energiebedarf deckt. Bis in die zwanziger Jahre dieses Jahrhunderts war man, zurückgehend auf Helmholtz und Kelvin, davon ausgegangen, daß nur die bei der Kontraktion freiwerdende Gravitationsenergie dafür in Frage käme. Physiker wie Lane und Emden[5] hatten sich in ihren Arbeiten auch auf diese mechanischen Betrachtungen beschränkt. Man wußte allerdings bereits, daß die auf diese Art verfügbare Energie nicht für die nachweislich lange Existenz der Sonne ausgereicht hätte[6], versuchte sich aber z.B. mit Konstruktionen zu retten, bei denen die Sonne genug Energie durch das Einfangen von Kometen und Asteroiden gewinnt.

Als erster vertrat Eddington in seinem 1926 erschienenen Buch „The inner Constitution of the Stars“ (deutsch 1928: „Der innere Aufbau der Sterne“) die These, daß die Sonne Kernenergie freisetzt. Er sprach in diesem Zusammenhang von der „Befreiung subatomarer Ener-

---

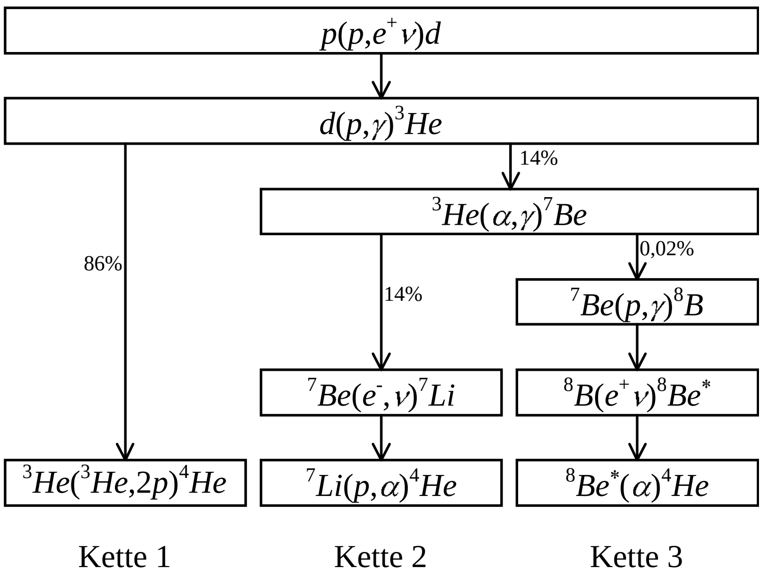
[5] vgl. J. Homer Lane: „On the Theoretical Temperature of the Sun“; Amer. Journ. of Sci. and Arts, 1870 und R. Emden : „Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie“;Teubner, 1907
[6] Diese Kenntnis beruhte vor allem auf geologischen Untersuchungen zum Alter der Erde.

gien“[7]. Etwas später wurde schließlich gezeigt, daß die pp-Kette und der 1938 von Bethe und Weizsäcker unabhängig voneinander entwickelte CNO-Zyklus in der Sonne stattfinden können.

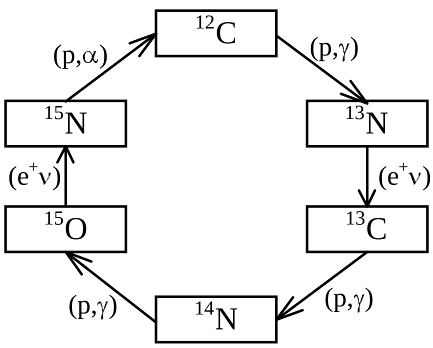
Zur Bestimmung der Reaktionsraten in Abhängigkeit von der chemischen Zusammensetzung, Dichte, Druck usw., und damit zur Bestimmung von ε, wurden in der Folgezeit große Anstrengungen unternommen, jeder einzelne Reaktionsschritt der verschiedenen Fusionsprozesse mußte dabei quantenphysikalisch untersucht werden.

Diese Entwicklung hatte zur Folge, daß diese Mechanismen in der Schule ebenfalls im einzelnen behandelt werden, wenn überhaupt etwas genaueres zur Physik der Sonne gesagt wird. Folgende oder ähnliche Diagramme kann man z.B. zum Wasserstoffbrennen finden :

pp-Kette :



CNO-Zyklus :



[7] vgl. Eddington 1928, Seite 6

Diese verschiedenen Reaktionsmechanismen scheinen somit also das wichtigste zu sein, was es über die Physik der Sonne zu wissen gibt. Obwohl doch in allen Fällen als Netto-Reaktion einfach 4 Protonen zu einem Heliumkern sowie 2 Positronen, 2 Neutrinos und Gammaquanten umgewandelt wurden :

$$4p \rightarrow {}^4_2He + 2e^+ + 2\nu + \gamma \quad .$$

Falls zusätzlich noch betont wird, dies sei dieselbe Reaktion wie in einer Wasserstoffbombe, wird der Eindruck einer explosiven, instabilen Sonne vermittelt, obwohl dies keineswegs der Realität entspricht. Gerade die Stabilität und Langlebigkeit ist das auffälligste Merkmal der Sonne. Zum Verständnis der Energiequelle der Sonne reicht die Netto-Reaktion vollkommen aus, und es sollte viel mehr Wert darauf gelegt werden, die Stabilität und außerordentlich lange Lebensdauer zu erklären, wozu einige Betrachtungen zum Reaktionsumsatz wesentlich mehr beitragen als die Reaktionsmechanismen.

Im folgenden Abschnitt soll nun gezeigt werden, wie mit geringem mathematischen Aufwand die für diese Stabilität entscheidenden Eigenschaften der Sonne erklärt werden können. Außerdem können mit einfachen Rechnungen zum Reaktionsumsatz erstaunliche Einsichten in das Sonneninnere erhalten werden.

Themen einer „neuen“ Sonnenphysik

In diesem Kapitel soll mit neuen Ansätzen etwas über den Zustand und die Struktur der Sterne gelernt werden. Dazu werden Überlegungen zur Energie- und Entropiebilanz des Sterns durchgeführt. Die Energiebilanz für den Stern beruht im wesentlichen darauf, daß das System in zwei gekoppelte Teilsysteme aufgespaltet werden kann. Die Energien dieser Teilsysteme stehen aber, wie sich dabei zeigen wird, in einer wohlbestimmten Beziehung zueinander. Es handelt sich bei diesen zwei Teilsystemen zum einen um das Gravitationsfeld des Sterns und zum anderen um die Materie des Sterns, die als ideales Gas beschrieben wird.

Eine Energiebilanz

Zur Bestimmung der gewünschten Beziehungen werden die im letzten Kapitel hergeleiteten Formeln in der Lagrange'schen Form benötigt. Dies sind noch einmal zusammengefaßt die folgenden Gleichungen :

- Massengleichung : $$\frac{dr(m)}{dm} = \frac{1}{4\pi \cdot r(m)^2 \cdot \rho(m)} \qquad (1a)$$
- hydrostatisches Gleichgewicht : $$\frac{dp(m)}{dm} = -\frac{G \cdot m}{4\pi \cdot r(m)^4} \qquad (2a)$$
- ideale Gasgleichung : $$p(m) = \frac{R}{\hat{m}} \cdot \rho(m) \cdot T(m) \qquad (3a)$$

Die Masse m ist der unabhängige Parameter und alle anderen Größen werden abhängig von m beschrieben, z.B. $p(m)$, $T(m)$, $\rho(m)$ usw.

Weiterhin geht man davon aus, daß alle Veränderungen des Sterns so langsam ablaufen, daß er sich immer im hydrostatischen Gleichgewicht befindet, denn nur dann gilt Gleichung (2a) und die im folgenden hergeleiteten Beziehungen. Diese Bedingung ist für die hier interessierenden Phasen im Leben der Sterne allerdings sehr gut erfüllt. Die extrem schnell ablaufenden Endphasen der Sternentwicklung wie z.B. Novae- und Supernovaeexplosionen fallen damit zwar aus der Betrachtung heraus, aber in ihnen gilt auch die Zustandsgleichung des idealen Gases schon lange nicht mehr und man muß Effekte wie Elektronenentartung und Neutronisation berücksichtigen.

Die Energie des Gravitationsfeldes

Zunächst wird die im Gravitationsfeld des Sterns gespeicherte Energie betrachtet. Die potentielle Energie eines Massenelementes *dm* im Abstand *r(m)* beträgt im Schwerefeld der Masse *m* [8]:

$$dE_{pot} = -\frac{G \cdot m}{r(m)} \cdot dm \ .$$

Die gesamte Gravitationsenergie des Sterns erhält man damit als Integral über die gesamte Masse des Sterns :

$$E_{Feld} = -\int_0^M \frac{G \cdot m}{r(m)} \cdot dm \ .$$

Der Wert von E_{Feld} ist negativ, da der Nullpunkt bei gleichmäßiger, unendlich weiter Verteilung der Sternmaterie angenommen wurde. $|E_{Feld}|$ ist die Energie der Feldes.

Man sieht außerdem, wie sich die Feldenergie bei einer gleichmäßigen Kontraktion bzw. Expansion aller Massenschalen ändert. Bei einer Kontraktion wird E_{Feld} kleiner (d.h. betragsmäßig größer !), es wird also Energie abgegeben, bei einer Expansion entsprechend umgekehrt.

Zunächst wird das Integral für E_{Feld} umgeformt. Zusammen mit Gleichung (2a) erhält man $\frac{G \cdot m}{r(m)} = -4\pi \cdot r(m)^3 \cdot \frac{dp(m)}{dm}$. Damit wird aus dem Integral :

$$E_{Feld} = -\int_0^M \frac{G \cdot m}{r(m)} \cdot dm = \int_0^M 4\pi \cdot r(m)^3 \cdot \frac{dp(m)}{dm} \cdot dm \ .$$

Durch partielle Integration erhält man daraus :

$$\int_0^M 4\pi \cdot r(m)^3 \cdot \frac{dp(m)}{dm} \cdot dm = \left[4\pi \cdot r(m)^3 \cdot p(m)\right]_0^M - \int_0^M 12\pi \cdot r(m)^2 \cdot \frac{dr(m)}{dm} \cdot p(m) \cdot dm$$

Der Term in Klammern verschwindet, denn an der Oberfläche bei $m = M$ ist $p(m) \approx 0$ und im Zentrum bei $m = 0$ ist $r = 0$. Der Ausdruck innerhalb des Integrals wird mit Hilfe von Gleichung (1a) umformt : $12\pi \cdot r(m)^2 \cdot \frac{dr(m)}{dm} = \frac{3}{\rho(m)}$. Damit ergibt sich :

$$E_{Feld} = -\int_0^M \frac{3 \cdot p(m)}{\rho(m)} \cdot dm \ .$$

[8] Bekannterweise trägt nur die innerhalb des Radius r liegende Masse zum Gewicht des Massenelementes bei.

Die Energie des Gases

Nun zur kinetischen Energie des idealen Gases. Sie beträgt :

$$dE_{Gas} = \tfrac{3}{2} \cdot R \cdot T \cdot dn = \tfrac{3}{2} \cdot R \cdot T \cdot \frac{1}{\hat{m}} \cdot dm = \tfrac{3}{2} \cdot \frac{p}{\rho} \cdot dm \ ,$$

wobei zum einen der Zusammenhang $\hat{m} = \dfrac{dm}{dn}$ und zum anderen die ideale Gasgleichung (3a) benutzt wurde. Man erhält :

$$E_{Feld} = -2 \cdot \int_0^M \tfrac{3}{2} \cdot \frac{p(m)}{\rho(m)} \cdot dm = -2 \cdot \int_0^M dE_{Gas} = -2 \cdot E_{Gas} \ .$$

Die Energiebilanz

Dies ist der angekündigte Zusammenhang zwischen der Energie des Gravitationsfeldes und der Energie des Gases[9] :

$$E_{Feld} = -2 \cdot E_{Gas} \ . \tag{6}$$

Um die Konsequenzen dieses Ergebnisses zu diskutieren, wird zunächst die Gesamtenergie *E* des Sterns betrachtet :

$$E = E_{Feld} + E_{Gas} = -E_{Gas} = \tfrac{1}{2} E_{Feld} \ . \tag{7}$$

Man sieht, die Gesamtenergie ist genau wie die Gravitationsenergie negativ, der Stern also in einem gebundenen Zustand. Allerdings ist sie nur halb so groß wie die Gravitationsenergie. Nur die Hälfte der bei der Kontraktion abgegebenen Gravitationsenergie wird also abgestrahlt und trägt damit zur Verringerung der Gesamtenergie bei. Die andere Hälfte wird im Gas als kinetische Energie der Teilchen gespeichert.

Noch deutlicher wird dies, wenn man eine Änderung der Gesamtenergie um *dE* betrachtet :

$$dE = -dE_{Gas} = \tfrac{1}{2} dE_{Feld} \ .$$

Eine Verringerung der Energie des Feldes durch Kontraktion führt also zu einer Verringerung der Gesamtenergie, allerdings nur um die Hälfte dieses Betrages. Gleichzeitig wird die Energie des Gases durch die andere Hälfte erhöht. Eine Veränderung der Gesamtenergie resultiert also immer in einer gleich großen, umgekehrten Veränderung der Energie des Gases. Da bei Konstanz der Teilchenzahl gilt :

---

[9] Wählt man etwas andere Bezeichnungen, E_{pot} statt E_{Feld} und E_{kin} statt E_{Gas} , erhält man das aus der theoretischen Mechanik bekannte Virialtheorem $E_{pot} = -2\ E_{kin}$, das bei einem System gravitierender Massenpunkte einen Zusammenhang zwischen potentieller und kinetischer Energie der Massen herstellt. Man könnte das Ergebnis also auch so interpretieren, daß man den Stern als mechanisches System aus etwa 10^{57} einzelnen Massenpunkten auffaßt, das dem Virialtheorem genügt.

$$dE_{Gas} = \tfrac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot dT \quad ,$$

ist eine Veränderung der Gasenergie verbunden mit einer Temperaturänderung gleichen Vorzeichens.

Die Energie des Gravitationsfeldes eines Sterns und die Energie des Gases stehen also in einem festen Verhältnis zueinander, Energiezunahme des Gesamtsystems bedeutet Abnahme der Gasenergie und umgekehrt. Der Stern reagiert daher auf Energieverlust mit Kontraktion und Aufheizung.

Um diese ungewohnte Erscheinung zu beschreiben kann man dem Stern eine negative spezifische Wärme zuschreiben.

Entropiebilanz

Die negative spezifische Wärme eines Sterns ist gleichbedeutend mit einer negativen Entropiekapazität.

Der Stern verringert seine Energie durch Abgabe von Entropie und erhöht sie durch Entropiezufuhr oder -produktion. Eine Änderung der Entropie des Sterns ist verbunden mit einer entsprechenden Energieänderung und daher einer umgekehrten Temperaturänderung. Kontraktion und Aufheizung ist verbunden mit Entropieverlust, Expansion und Abkühlung nur möglich durch Entropieaufnahme. Anders gesagt heißt das, ein großer kühler Stern enthält mehr Entropie, als ein kleiner und heißer Stern.

Es ist auf den ersten Blick ungewohnt, daß Entropieerhöhung mit einer Temperaturabnahme verbunden sein soll, daß diese Möglichkeit aber existiert, ist bei näherer Betrachtung leicht einzusehen. Es gibt im wesentlichen zwei Effekte die den Entropieinhalt eines Systems beschreiben. Die Entropie ist um so größer :

- je größer das Volumen (entspricht höherer Unordnung im Ortsraum)
- je größer die Temperatur (entspricht höherer Unordnung im Impulsraum)

Diese zwei Effekte sind bei der Expansion bzw. Kontraktion eines Sternes nun gerade gegenläufig. Die z.B. bei einer Entropieerhöhung auftretende Volumenvergrößerung ist so überproportional groß, daß die Temperatur gleichzeitig absinken muß.

Die Sonne im Labor

Um alles bisher entdeckte noch einmal zu veranschaulichen, wird nun davon ausgegangen man könnte die Sonne in ein Labor stellen und dort den Entropiefluß beliebig regeln. Dazu könnte z.B. ein Hohlspiegel rund um die Sonne aufgestellt werden, um den Entropieverlust zu verhindern. Außerdem soll das Fusionsbrennen in der Sonne wie eine Heizung ein- und ausgeschaltet werden können, um den Entropiezufluß zu steuern.

Zunächst werden die Spiegel um die Sonne gestellt und die Heizung bleibt ausgeschaltet. Die Sonne wird sich dann nicht verändern. Beim Einschalten der Heizung wird sie sich ausdehnen und bei dieser Expansion abkühlen.

Nimmt man die Spiegel weg wird sich ein Fließgleichgewicht zwischen erzeugter und abgestrahlter Entropie einstellen. Die Sonne ist wieder stabil und stationär. Damit kann die Stabilität der thermo-nuklearen Brennphasen verstanden werden, denn dieser Fall ist während dem nuklearen Brennen in der Sonne tatsächlich realisiert.

Jetzt wird die Heizung abgeschaltet, und die Sonne wird auf den fortgesetzten Entropieverlust mit Kontraktion und Erwärmung reagieren. Auch dieser Fall wird von der Sonne realisiert und zwar vor bzw. zwischen den nuklearen Brennphasen.

Stabilität

Nun soll die Stabilität von Systemen mit negativer spezifischer Wärme bzw. Entropiekapazität untersucht werden. Diese sind, im thermischen Kontakt mit anderen Systemen, immer instabil. Nur bei exaktem thermischem Gleichgewicht fließt keine Entropie und man erhält einen labilen Zustand. Sobald die Temperatur sich aber nur etwas unterscheidet, wird Entropie vom wärmeren zum kälteren Körper fließen. Da das System mit negativer Entropiekapazität seine Temperatur dabei aber entgegengesetzt zur Entropieänderung verändert, wird die Temperaturdifferenz vergrößert und der Antrieb für den weiteren Entropiefluß verstärkt[10].

Auch die Sterne sind im thermischen Kontakt mit ihrer Umgebung: mit dem kalten Universum mit einer Temperatur von nur 3 Kelvin. Da die Sterne sich aufgrund der Kontraktion erwärmen, müssen sie Energie und Entropie abstrahlen. In den Phasen vor Beginn der Wasserstoff-Fusion ist dies verbunden mit weiterer Kontraktion und Aufheizung. Ein Stern ist daher ein thermisch instabiles System.

Wärmewiderstand und Reaktionswiderstand

Daß der Stern trotz dieser Instabilität nicht sehr kurzlebig ist, liegt im wesentlichen an den folgenden zwei bremsenden Faktoren, dem großen Widerstand der Wärmeleitung innerhalb des Sterns und dem großen Reaktionswiderstand der Kernfusionsprozesse. Diese zwei Punkte sollen nun im weiteren etwas ausführlicher untersucht werden.

[10] Dabei darf das andere System seine Temperatur natürlich nicht zu stark ändern, damit kein Temperaturgleichgewicht erreicht wird. Ideal ist ein Wärmereservoir mit konstanter Temperatur.

„Wärmestau" und Aufheizung

Die Kontraktion des Sterns in der Anfangsphase seines Lebens führt zu einer Aufheizung. Energie und Entropie muß vom Sterninnern nach außen zur Oberfläche gelangen und abgegeben werden. Die Sternmaterie selbst ist aber für diesen Entropie- und Energiestrom ein Hindernis. Der Entropiefluß ist dadurch beschränkt und es entsteht ein „Wärmestau", der zum einen die Geschwindigkeit der Kontraktion bremst, zum anderen aber auch zu einer starken Aufheizung des Sterninneren gegenüber der Oberfläche führt. Um den Entropiestrom von innen nach außen anzutreiben, ist nämlich ein entsprechender Temperaturgradient erforderlich. Daher erwärmt sich das Sternzentrum, bis der Temperaturgradient auf eine ausreichenden Größe angewachsen ist[11].

Auf diese Weise erhitzt sich beispielsweise das Zentrum der Sonne bis zu einer Temperatur von derzeit etwa $1{,}55\cdot10^7$K bei einer Oberflächentemperatur von 5800K. Wegen der gewaltigen Größe der Sonne mit einem Radius von ungefähr $7\cdot10^8$m entspricht dieser hohen Temperaturdifferenz aber trotzdem nur ein mittlerer Temperaturgradient von etwa

$$\frac{\overline{dT}}{dr} \approx 0{,}02\,\tfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}\ .$$

Derselbe Effekt, der so zur Aufheizung der Sonne führt, ist auf der Erde dafür verantwortlich, daß sich z.B. Misthaufen im Inneren erwärmen. Sie müssen regelmäßig durchmischt werden, um eine Selbstentzündung zu verhindern. Man könnte diesen Effekt daher als „Misthaufeneffekt" bezeichnen[12].

Energiequellen und Lebensdauer

Trotz der Verlangsamung der Kontraktionsgeschwindigkeit durch die Beschränkung des möglichen Entropie- und Energietransportes vom Sterninneren zur Oberfläche wäre die Lebensdauer der Sonne und aller Sterne allerdings wesentlich kürzer als sie glücklicherweise ist. Man kann leicht ausrechnen wie lange die bei vollständiger Kontraktion der Sonne freigesetzte Energie die Abstrahlung der Sonne decken könnte, und kommt dabei auf eine Zeitdauer von etwa $2\cdot10^7$ Jahren. Dies ist weniger als ein Hundertstel der tatsächlichen Lebensdauer der Sonne von etwa $7\cdot10^9$ Jahren.

Statt dessen wird sie aber bei Erreichen einer ausreichenden Zentraltemperatur und -dichte durch das Einsetzen der Wasserstoff-Fusion stabilisiert. Diese liefert dann die abgestrahlte Entropie und Energie ständig nach, so daß die Sonne ihre Gestalt für lange Zeit beibehalten kann.

---

[11] Ohne diesen Effekt, d.h. bei ungehindertem Entropiestrom, würde die Sonne in kürzester Zeit kontrahieren und dabei eine isotherme Temperaturverteilung beibehalten.
[12] Dieser Vergleich geht zurück auf Herrn Professor Pflug aus Dortmund.

Am Beispiel der Sonne sollen nun durch einfache Überlegungen und Rechnungen einige Zahlen zur Lebensdauer und zum Reaktionsumsatz zusammengetragen werden.

Dazu werden zunächst einige Parameter der Sonne benötigt. Die Zentral- und Oberflächentemperatur, der Radius und der daraus abgeleitete mittlere Temperaturgradient wurden bereits verwendet :

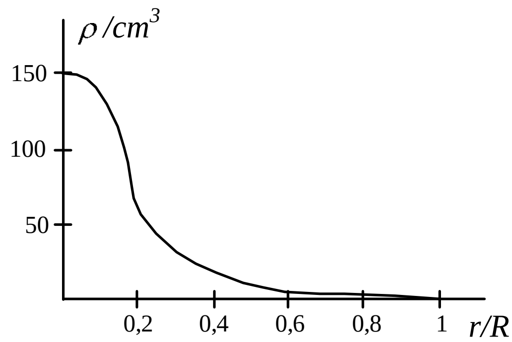
- Oberflächentemperatur : $T(R) = 5800$ K
- Zentraltemperatur : $T(0) = 1{,}55 \cdot 10^7$ K
- Radius : $R = 7 \cdot 10^8$ m

Damit folgt : $\overline{\frac{dT}{dr}} = \frac{T(0) - T(R)}{R} \approx 0{,}022\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}$, wie bereits erwähnt wurde.

Weiterhin werden benötigt :

- Masse : $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg
- Strahlungsenergiestrom : $P = 4 \cdot 10^{26}$ W
- Zentraldichte : $\rho(0) = 150\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$

Die Oberflächendichte ist ungefähr Null und die Verteilung der Dichte über dem Radius hat folgende Gestalt :



Es fällt auf, daß die Masse der Sterne sehr stark im Inneren konzentriert ist, 90% der Masse liegen innerhalb des halben Radius.

Die Sonne bestand zu Beginn aus etwa 76% Wasserstoff, 23% Helium und 1% schwereren Elementen[13].

Beim Wasserstoffbrennen werden nun, wie im letzten Kapitel erläutert, jeweils 4 Wasserstoffkerne zu einem Heliumkern verschmolzen. Die pro entstandenem Heliumkern umgesetzte Energie beträgt :

$$E_{pp} \approx 25\,\mathrm{MeV} \approx 4\,\mathrm{pJ} \;.$$

---

[13] Alle chemischen Elemente außer Wasserstoff und Helium werden in der Astrophysik als „Metalle“ bezeichnet.

Damit wird nun die Dauer der Wasserstoffbrennphase in der Sonne abgeschätzt. Da die Kernfusion nur im heißen und dichten Zentrum stattfindet, wird etwa 10% des verfügbaren Wasserstoffs dabei umgesetzt. Die Zahl der fusionierten Wasserstoffkerne beträgt also :

$$N_H \approx 0{,}1 \cdot \frac{\frac{3}{4} M}{m_H} \approx 9 \cdot 10^{55} \ ,$$

wobei $m_H = 1{,}627 \cdot 10^{-27}$ kg die Masse eines Wasserstoffkerns ist. Damit beträgt die verfügbare Energie:

$$E_H = \tfrac{1}{4} \cdot N_H \cdot E_{pp} = 9 \cdot 10^{55} \text{ pJ} = 9 \cdot 10^{43} \text{ J} \ ,$$

da 4 Wasserstoffkerne pro Reaktionszyklus gebraucht werden. Das Wasserstoffbrennen dauert dann etwa

$$t_n = \frac{E_H}{P} \approx 2{,}25 \cdot 10^{17} \text{ s} \approx 7 \cdot 10^{9} \text{ a} \ .$$

Diese Zeitdauer diente weiter oben als Abschätzung für die Gesamtlebensdauer der Sonne.

Reaktionsumsatz

Erstaunliche Einsichten über den Zustand des Sonneninnern liefern einige Überlegungen zum Reaktionsumsatz in der Sonne. Man erkennt daran deutlich, daß man sich die Sonne keinesfalls als explosive Wasserstoffbombe vorstellen darf. Vielmehr ist der Reaktionswiderstand selbst bei den Temperaturen und Dichten in der Sonne noch sehr hoch. Nur die riesige Masse der Sonne ermöglicht es, von außen die Auswirkungen der seltenen Reaktionsvorgänge so deutlich zu sehen.

Der Fusionsprozess läuft nur innerhalb der ersten 20% des Radius ab. Das entsprechende Volumen beträgt :

$$V = \tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0{,}2 \cdot R)^3 \approx 1{,}15 \cdot 10^{25} \text{ m}^3 = 1{,}15 \cdot 10^{28} \text{ l} \ .$$

Pro Liter Sonnenmaterie werden daher :

$$P_l = \frac{P}{V} \approx 0{,}035 \tfrac{\text{W}}{\text{l}}$$

umgesetzt. Dies entspricht einem Reaktionsumsatz von :

$$I_n = \frac{P_l}{E_{pp}} = \frac{0{,}035 \ \text{J}/\text{l·s}}{4 \text{ pJ}} \approx 8{,}75 \cdot 10^{9} \ \tfrac{\text{Bq}}{\text{l}} \ .$$

Im Vergleich zu gewöhnlichen Energie- und Reaktionsumsatzraten bei chemischen Reaktionen auf der Erde sind diese Zahlen ausgesprochen klein. Jeder Mensch setzt zum Beispiel circa 1 Joule pro Sekunde und Liter um, bei einem Reaktionsumsatz von $I_n = 10^{18}$ Bq.

Jeder Liter Sonnenmaterie im Brennzentrum enthält etwa :

$$N = \frac{m}{m_H} = \frac{75\,{}^{\mathrm{kg}}\!/\!_{\mathrm{l}}}{1{,}627 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}} \approx 4{,}5 \cdot 10^{28}\ \tfrac{1}{\mathrm{l}}$$

Teilchen. Da pro Reaktionsschritt 4 Wasserstoffkerne benötigt werden, bedeutet das, daß nur einer von $\frac{1{,}125 \cdot 10^{28}}{8{,}75 \cdot 10^{9}} \approx 1{,}25 \cdot 10^{18}$ möglichen Formelumsätzen pro Sekunde stattfindet [14].

Stabilität der Brennphasen

Daß der Reaktionsumsatz so gleichmäßig auf diesem Niveau gehalten werden kann, wird ermöglicht durch die negative spezifische Wärme bzw. Entropiekapazität der Sonne.

Ist der Umsatz zu groß, führt die überschüssige Energie bzw. Entropie zu einer Expansion und der damit verbundenen Abkühlung des Sterns, wodurch die Reaktionsgeschwindigkeit verringert wird. Bei zu geringem Umsatz dagegen wird die Reaktion durch Kontraktion und Erhitzung beschleunigt. Der Stern reguliert sich dadurch in den Brennphasen selbst. Die bei der Kontraktion die Instabilität verursachende negative spezifische Wärme und Entropiekapazität des Systems ist während des Fusionsbrennens gerade für die Stabilität des Sterns notwendig.

Zusammenfassung der Sternentwicklung

Am Ende des Kapitels sollen noch einmal die Konsequenzen der bis hier zusammengetragenen Erkenntnisse für die Sternentwicklung zusammengefaßt werden.

Zieht sich ein Stern aus idealem Gas unter seiner eigenen Gravitation zusammen, erhöht er dabei, wie gezeigt wurde, gleichzeitig die kinetische Energie der Gasteilchen und damit seine Temperatur. Wärmer als seine Umgebung zu sein, hat für ihn aber zur Folge, Entropie, und damit Energie abzustrahlen. Diese Energie kann er nur aus seinem Reservoir an Gravitationsenergie decken, was zu einer weiteren Komprimierung und Aufheizung führt.

So wird er immer weiter komprimieren und sich dabei weiter erhitzen, bis er nach Beginn der thermo-nuklearen Reaktionen die abgestrahlte Energie und Entropie ersetzen kann und so stabilisiert wird. Es stellt sich ein Fließgleichgewicht zwischen der innen erzeugten und außen abgestrahlten Entropie ein.

Die innere Struktur des Sterns ist dabei aber nicht durch die Kernreaktionen bestimmt, sondern wurde bereits vorher in der Kontraktionsphase festgelegt. Nach dem Wasserstoffbrennen kommt er wieder in eine Kontraktionsphase, bis weitere und immer kürzere Brennphasen

[14] Diese Zahl ist nicht nur zufällig von derselben Größenordnung wie die Dauer des Wasserstoffbrennens in Sekunden.

ihn wieder zeitweise stabilisieren[15]. Am Ende ist diese Einbahnstraße der Kontraktion nur dadurch zu verlassen, daß die ideale Gasgleichung ihre Gültigkeit verliert. Elektronenentartung und Neutronisation werden bei ausreichenden Dichten dominant und die Entropiekapazität und spezifische Wärme sind dann nicht mehr negativ. Der Druck wird weitgehend unabhängig von der Temperatur und der Stern kann abkühlen, ohne daß das hydrostatische Gleichgewicht gestört und der Stern instabil wird.

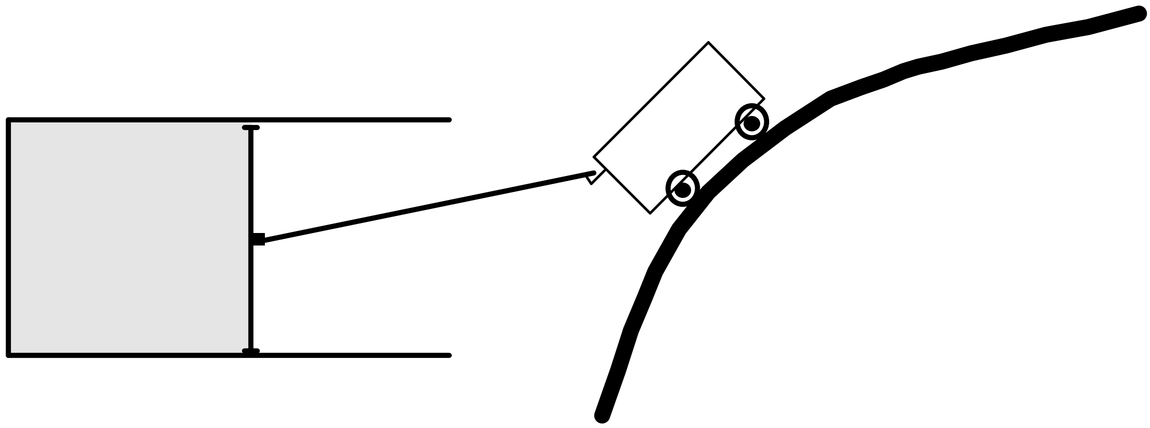
[15] Anmerkung zu Roten Riesen : Beim Übergang zur zweiten Brennphase des Heliumbrennens, in der Helium zu Kohlenstoff fusioniert wird, blähen sich die Sterne gewaltig auf und werden zu Roten Riesen. Die Sonne wird sich dann bis über die Erdbahn hinaus ausdehnen. Dies scheint auf den ersten Blick ein Widerspruch zum oben geschilderten Bild der Sternentwicklung zu sein. Dies liegt aber nur daran, daß die Sonne mit dem identifiziert wird, was man sehen kann. Wo ist aber eigentlich ihre Oberfläche? Zu beobachten ist der scharfe Übergang, an dem die Sonnenmaterie für die Strahlung undurchlässig wird, obwohl schon bei der Betrachtung der Dichteverteilung zu sehen war, daß diese Grenze bei Betrachtung der Massenverteilung ein schlechtes Maß für die Sonnengröße ist. Bei Roten Riesen ist das Zentrum tatsächlich viel dichter und heißer als zuvor, der Stern unter dem Aspekt der Massenverteilung also weiter komprimiert. Die Außenbereiche sind aber noch viel stärker verdünnt als beim Wasserstoffbrennen, der optische Radius daher größer.

Ein Modell

Nachdem im letzten Kapitel gezeigt wurde, daß die Eigenschaften und die Entwicklung der Sterne im wesentlichen durch die negative Entropiekapazität des Systems bestimmt werden, soll in diesem Kapitel ein Modellsystem untersucht werden, das diese Eigenschaft ebenfalls besitzt. Der Vorteil dieses Modells ist, daß es mit einer einfachen Mechanik der Anschauung wesentlich zugänglicher ist als die Sonne. Es läßt sich aufgrund von Reibungsverlusten und weiteren experimentellen Schwierigkeiten zwar wohl nicht real aufbauen, als Gedankenexperiment ist es aber gut geeignet. Da außerdem die Werte von Druck, Dichte, Temperatur usw. des Gases nicht vom Ort abhängen, ist das System auch einfacher zu handhaben als die Sonne.

Aufbau

Das System soll den folgenden Aufbau besitzen :



Es besteht aus einem gasgefüllten Zylinder. Dieser Zylinder soll mit einem idealen Gas gefüllt sein. Der Kolben ist über eine Stange mit einem Wagen verbunden, der sich auf einer gekrümmten Bahn bewegen kann.

Mit diesem Aufbau soll erreicht werden, daß die durch den Wagen auf den Kolben wirkende Kraft mit dem Volumen auf eine bestimmte Art variiert.

Durch die Krümmung der Bahn kann der Volumen-Kraft-Zusammenhang im Prinzip beliebig vorgegeben werden. Hier sei die Bahnkrümmung zunächst so gewählt, daß zwischen der durch die Mechanik festgelegten Kraft F_m und dem Volumen V folgender Zusammenhang gilt :

$$F_m \cdot V^x =: a = const \quad .$$

Dabei ist a ein durch die Mechanik des Systems vorgegebener Wert und x ein noch freier Parameter. Dieser Zusammenhang wurde so gewählt, da durch Variation von x jede durch eine Potenz zu beschreibende Beziehung möglich ist, außer dem ziemlich langweiligen Fall mit $V = const$. Im weiteren soll nun die Abhängigkeit des Systemverhaltens vom Wert der Zahl x untersucht werden.

Stabilität des Systems

Zunächst soll untersucht werden, durch welche Bedingungen stabile Gleichgewichtslagen des Systems beschrieben werden. Dazu beachtet man, daß der Druck des Gases p eine Kraft $F_g = pA$ (A ist die Kolbenfläche) auf den Kolben verursacht, die F_m entgegengerichtet ist. Die Gesamtkraft beträgt daher :

$$F := F_m - F_g \ .$$

Das Potential der Anordnung erhält man durch das Integral :

$$U(s) = \int F \cdot ds \ ,$$

wobei s die Verschiebung des Kolbens beschreibt.

Gleichgewichtslagen sind die Extrema dieses Potentials, die Minima sind stabil, die Maxima labil. Zwischen den Extrema ist das System instabil. Das System ist also :

- im stabilen Gleichgewicht für :

  $$\frac{dU(s)}{ds} = F = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2U(s)}{ds^2} = \frac{dF}{ds} > 0 \ .$$

  Da $s = \frac{V}{A}$ und A konstant ist, ist $\frac{dF}{ds} = A \cdot \frac{dF}{dV}$, die zweite Bedingung also gleichbedeutend mit $\frac{dF}{dV} > 0$.

- im labilen Gleichgewicht für :

  $$\frac{dU(s)}{ds} = F = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{dF}{dV} < 0 \ .$$

- instabil für :

  $$\frac{dU(s)}{ds} = F \neq 0 \ .$$

Erwartungsgemäß ist also Kräftegleichgewicht am Kolben, d.h. F=0, eine notwendige Bedingung für eine Gleichgewichtslage des Systems.

Existenz eines Gleichgewichts bei gegebenem Entropieinhalt

Als nächstes wird untersucht, unter welchen Bedingungen an x das System bei gegebenem Entropieinhalt eine stabile Gleichgewichtslage einnehmen kann. Dazu wird angenommen, daß das System perfekt entropieisoliert ist und daher nur isentrope Zustandsänderungen möglich sind. Für Gasdruck und Volumen gilt dann beim idealen Gas die Adiabatengleichung :

$$p \cdot V^{\gamma} = const ,$$

$\gamma = \dfrac{c_p}{c_V}$ ist der Adiabatenexponent. Er ist immer größer als eins und für einatomige Gase, also z.B. Edelgase, ist $\gamma = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$.

Der Gasdruck verursacht eine Kraft $F_g = A \cdot p =: \dfrac{b}{V^{\gamma}}$ am Kolben. Die Konstante *b* ist vom Entropieinhalt des Systems abhängig. Insgesamt erhält man :

$$F = F_m - F_g = \frac{a}{V^x} - \frac{b}{V^{\gamma}} \ .$$

Mit den Bedingungen für ein stabiles Minimum ergibt sich :

$$F = \frac{a}{V^x} - \frac{b}{V^{\gamma}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{V^x} = \frac{b}{V^{\gamma}}$$

und

$$\frac{dF}{dV} = -x \cdot \frac{a}{V^{x-1}} + \gamma \cdot \frac{b}{V^{\gamma-1}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x \cdot V + \gamma \cdot V > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma > x \ .$$

Das System hat eine stabile Gleichgewichtskonfiguration also nur unter der Bedingung $x < \gamma$.

Lage der Gleichgewichtskonfiguration

Wenn eine Gleichgewichtslage existiert, die Bedingung $x < \gamma$ also erfüllt ist, ist dieses Gleichgewicht durch die Mechanik und den Entropieinhalt, d.h. durch die Systemgrößen *a* und *b* festgelegt. Es gilt dann :

$$F_m = F_g = \frac{a}{V_0^x} = \frac{b}{V_0^{\gamma}} \ .$$

Damit folgt für Volumen und Gasdruck :

$$V_0 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\gamma - x}}$$

$$p_0 = \frac{F_g}{A} = \frac{a}{A} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{x}{x-\gamma}}$$

Mit Hilfe der Gasgleichung kann auch die Temperatur der Gleichgewichtslage bestimmt werden :

$$T_0 = \frac{p_0 \cdot V_0}{n \cdot R} = \frac{1}{n \cdot R \cdot A} \cdot a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{x-1}{x-\gamma}}$$

Damit kann natürlich auch der Gleichgewichtsdruck und das Gleichgewichtsvolumen in Abhängigkeit von der Gleichgewichtstemperatur T_0 angeben werden, anstatt in Abhängigkeit von b und damit vom Entropieinhalt. Es ist :

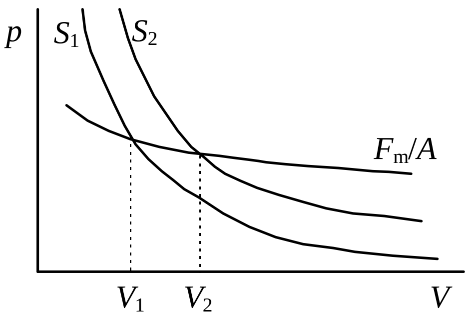
$$V_0 = \left(\frac{n \cdot R \cdot A}{a} \cdot T_0\right)^{\frac{1}{1-x}} \tag{8}$$

$$p_0 = \left(\frac{A \cdot (n \cdot R \cdot T_0)^x}{a}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

Abhängigkeit der Gleichgewichtslage vom Entropieinhalt des Systems

Nun soll die Frage beantwortet werden, ob das Volumen der Gleichgewichtslage mit wachsendem Entropieinhalt des Systems zu- oder abnimmt. Da das System in seinen Eigenschaften der Sonne ähnlich sein soll, erwartet man, daß das Volumen mit der Entropie ansteigt.

Zur Beantwortung dieser Frage werden zwei Isentropen mit den beiden unterschiedlichen Entropiewerten $S_1 < S_2$ betrachtet. Die Isentrope der größeren Entropie liegt im p-V-Diagramm bekanntlich vollständig über der Isentrope kleinerer Entropie :



Aufgrund der Mechanik muß die Randbedingung $p = \frac{F_m}{A} = \frac{a}{A \cdot V^x}$ erfüllt sein. Anhand der Schnittpunkte dieser Kurve mit den Isentropen, die die jeweiligen Volumina im Gleichgewicht angeben, erkennt man, daß für $x < \gamma$ das Volumen bei kleinerer Entropie immer geringer ist.

Es gilt allgemein :

$$S_1 < S_2 \quad \Rightarrow \quad V_0(S_1) < V_0(S_2)\ .$$

Das heißt aber auch, daß sich das Modell in dieser Hinsicht wie ein Stern verhält.

Änderung der Temperatur mit der Gleichgewichtslage

Es wurde gezeigt, daß sich das Volumen des Modells mit der Entropie wie bei einem Stern ändert :

- Entropiezunahme bewirkt steigendes Volumen, also Expansion,
- Entropieabnahme verursacht fallendes Volumen, also Kontraktion.

Wie verhält sich dabei aber die Temperatur des Gases? Gibt es Bedingungen, bei denen das System wie die Sterne eine negative Entropiekapazität besitzt?

Die Antwort auf diese Frage liefert Gleichung (8), die hier hergeleitet wird. Da das System sich langsam durch Gleichgewichtslagen verändern soll, gilt aufgrund der Mechanik :

$$p \cdot V^x = \frac{F_m}{A} \cdot V^x = \frac{a}{A} \ .$$

Andererseits ist wegen der Gasgleichung :

$$p \cdot V = nR \cdot T \ .$$

Damit folgt :

$$p \cdot V = \frac{a}{A \cdot V^x} \cdot V = \frac{a}{A} \cdot V^{1-x} = nR \cdot T$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{a}{nR \cdot A} \cdot V^{1-x} \quad \text{, d. h.} \quad T \sim V^{1-x} \ .$$

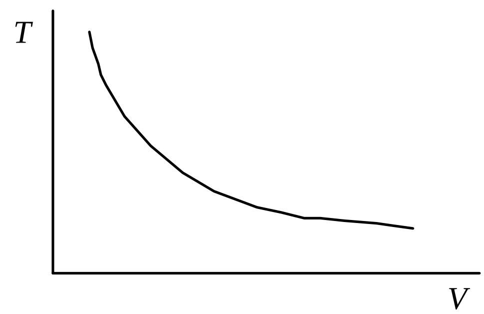
Unter der Nebenbedingung $x < \gamma$ wird eine Fallunterscheidung nach x durchgeführt :

- $1 < x < \gamma$:

  Dann ist mit $y := x - 1$ und damit $y > 0$:

  $$T \sim \frac{1}{V^y}$$

  Die Temperatur fällt also mit steigendem Volumen bzw. steigender Entropie, das System hat eine negative Entropiekapazität und entspricht damit weitgehend den Eigenschaften eines Sterns.

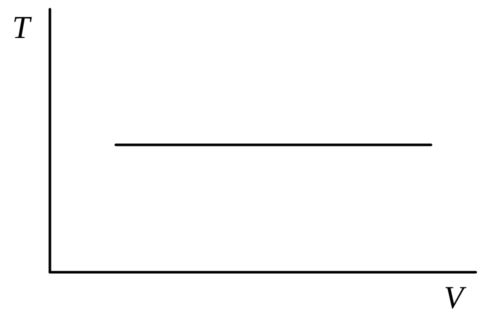


- $x = 1$:

  Bei $x = 1$ ist

  $$T = \frac{a}{nR \cdot A} = const$$

  Die Temperatur ist konstant und unabhängig vom Volumen bzw. Entropieinhalt.

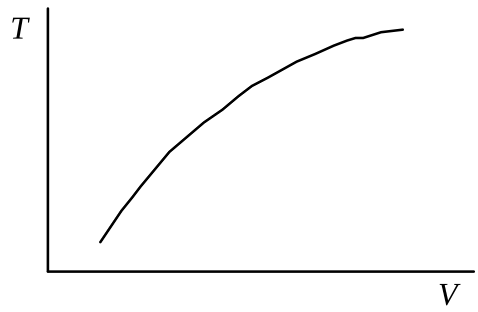


- $x < 1$:

  Es ist mit $y := 1 - x$ und damit $y > 0$:

  $T \sim V^{\,y}$

  Das System hat positive Entropiekapazität und kühlt bei Kontraktion ab.



Ergebnisse des Modells

Insgesamt sieht man, daß sich das Modell bei geeigneter Vorgabe der Mechanik, d.h. mit $1 < x < \gamma$, wie die Sonne verhält. Bei Entropiezufuhr, d.h. Aufheizung, expandiert es und kühlt ab. Andererseits wird es wie ein Stern bei Entropieverlust kontrahieren und dabei heißer werden. Wie ein Stern ist es im thermischen Kontakt mit einer kühlen Umgebung instabil.

Man erkennt daran, daß die Sonne sich zwar nach unseren gewohnten Maßstäben ungewöhnlich verhält, es aber keinen prinzipiellen Grund gibt, der ein solches Verhalten auf der Erde verbieten würde. Statt dessen kann man ein analoges System auf der Erde ohne großen Aufwand konstruieren und sich vorstellen.

Fazit

Zum Schluß sollen noch einmal die wichtigsten Ergebnisse der Überlegungen zu den Eigenschaften der Sterne zusammengefaßt werden.

Es gelang mit geringem mathematischen Aufwand, die wichtigsten Eigenschaften eines Sterns mit Hilfe einer Energiebilanz zu ermitteln. Diese Bilanz lieferte als Resultat, daß die Energie des Gravitationsfeldes eines Sterns und die Energie des Gases in einem festen Verhältnis zueinander stehen. Daraus konnte abgeleitet werden, daß ein Stern eine negative spezifische Wärme und Entropiekapazität besitzt. Dies bedeutet, er reagiert auf Energie- und Entropieverlust mit Kontraktion und Aufheizung.

Im Laufe der Diskussion wurde dann gezeigt, daß diese Eigenschaft wichtig für das Verständnis der Struktur der Sternentwicklung ist. Sie ist zum einen allein verantwortlich für die Gestalt und Abstrahlungscharakteristik unserer Sonne. Insbesondere ist die hohe Temperatur des Sonneninnern kein Ergebnis der in ihr ablaufenden Kernfusionsreaktionen, sondern wird bereits während der anfänglichen Kontraktion, vor Beginn des Wasserstoffbrennens, erreicht. Die negative spezifische Wärme und Entropiekapazität führen erst dazu, daß durch die Aufheizung beim Energieverlust die zur Kernfusion notwendige Temperatur erreicht wird.

Weiterhin ist auch die lange Lebensdauer und vor allem die Konstanz und Stabilität des Leuchtens der Sonne dadurch zu verstehen. Die Sonne regelt dank dieser Eigenschaften den Reaktionsumsatz der Kernfusion in ihrem Zentrum selbst, sie ist ein perfektes selbstregulierendes System. Ein zu großer Reaktionsumsatz wird durch die mit dem Energieüberschuß verbundene Expansion und Abkühlung automatisch reduziert und umgekehrt. So sieht man, daß allein durch das Verständnis dieser Eigenschaft und der daraus resultierenden Konsequenzen der prinzipielle Ablauf der Evolution eines Sterns verständlich wird.

Im vorigen Kapitel wurde dann schließlich noch gezeigt, daß solche Systeme mit negativer spezifischer Wärme und Entropiekapazität nicht auf die Welt der Sterne beschränkt sind. Vielmehr kann man sich auch unter irdischen Bedingungen ein Modellsystem mit dieser Eigenschaft vorstellen.

Literaturverzeichnis

Eddington, Sir Arthur Stanley : Der innere Aufbau der Sterne
Springer, München, 1928

Herrmann, Friedrich : Thermodynamik
Abteilung für Didaktik der Physik, Universität Karlsruhe, 1994

Herrmann, Friedrich : Der Karlsruher Physikkurs, Band 3
Abteilung für Didaktik der Physik, Universität Karlsruhe, 1995

Grehm, Joachim (Hg.) : Metzler Physik
2. Auflage, Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1991

Kippenhahn, Rudolf : 100 Milliarden Sonnen
5. Auflage, Piper, München, 1980

Kippenhahn, Rudolf; Weigert, Alfred : Stellar Structure and Evolution
Springer, Berlin, 1990

Oberhummer, Heinz : Kerne und Sterne
Barth, Leipzig, 1993

Sexl, Roman; Sexl, Hannelore : Weiße Zwerge, schwarze Löcher
2. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 1990

Unsöld, Albrecht; Baschek, Bodo : Der neue Kosmos
4. Auflage, Springer, Berlin, 1988

Danksagung

Ich möchte mich bei allen bedanken, die am guten Abschluß dieser Arbeit in der einen oder anderen Form beteiligt waren. Insbesondere bei Herrn Professor Herrmann für die Vergabe des Themas, dafür daß er nie den Glauben an das Potential des Themas verloren hat und die Betreuung während dieser Zeit. Außerdem möchte ich mich bei allen ehemaligen und neuen Mitgliedern der Abteilung Didaktik der Physik bedanken für die angenehme Atmosphäre am Institut, wo ich mich immer sehr wohl gefühlt habe.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß die Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt wurde und daß alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, durch Angaben der Quellen als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Karlsruhe, im Dezember 1995